

Apuntes de Lógica Proposicional

La lógica proposicional trabaja con expresiones u oraciones a las cuales se les puede asociar un **valor de verdad** (verdadero o falso); estas sentencias se conocen como sentencias declarativas o, simplemente, **proposiciones**.

Al escuchar algo como *La rosa es una flor* o *El cocodrilo es un mamífero*, fácilmente se puede determinar si estas expresiones son verdaderas o falsas; sin embargo, al escuchar *No seas tonto!* o *Quién ganará las elecciones?*, no es posible asociar a ellas un valor de verdad. Expresiones como las primeras dos son los elementos fundamentales con los que trabaja la lógica proposicional.

Las siguientes expresiones son proposiciones:

- Todos los jueves llueve.
- Los caballos comen pasto.
- Tres es mayor que cinco.

Las siguientes expresiones no son proposiciones:

- ¿Qué hora es?
- Por favor, alcánzame aquello.

No existe una notación generalmente utilizada para representar proposiciones, pero en este curso se identifica a cada una de ellas con una letra minúscula.

p: Algunos perros tienen ojos azules.

q: Dos más dos es cinco.

El **valor de verdad** de una proposición se indica con la letra **T** si es **verdadero** o con **F** si es **falso**.

El valor de verdad no se indica con la letra **V** para evitar confusiones con un operador que se verá más adelante.

Nuestro trabajo consiste en **formular proposiciones** (construir fórmulas) a partir de expresiones en **lenguaje natural**.

Para ello, empleamos el **lenguaje simbólico**, llamado así porque utiliza una serie de símbolos en la formulación de las proposiciones.

Las proposiciones pueden ser **simples** o **compuestas**.

Las proposiciones simples están formadas por dos términos vinculados por un **operador relacional**.

Cada término debe ser un valor, una **magnitud numérica** o una expresión aritmética que incluya valores y/o magnitudes numéricas.

El operador relacional indica la relación entre el término de la izquierda y el de la derecha.

Operador	Significado	Otras Formas
=	Igual a...	==
≠	Distinto de...	<> !=
>	Mayor que...	
<	Menor que...	
≥	Mayor o igual que...	>=
≤	Menor o igual que	<=

Tabla 1: Operadores Relacionales

Ejemplos de proposiciones simples:

p: Tres es mayor que cinco	$(3 > 5)$
q: La suma de a y b no supera 7	$(a+b \leq 7)$
r: La temperatura no alcanza los 20°C	$(t < 20)$

Las **proposiciones compuestas** están formadas por una o más proposiciones simples modificadas o vinculadas por **conectivos u operadores lógicos**.

Operador	Denominación	Significado
$\wedge$	Conjunción	Ambas son verdaderas
$\vee$	Disjunción Incluyente	Al menos una es verdadera
$\underline{\vee}$	Disjunción Excluyente	Solo una es verdadera
$\sim$	Negación	No es verdadera

Tabla 2: Operadores Lógicos

La formulación de proposiciones compuestas en general se complica por las ambigüedades del lenguaje natural y la utilización de términos distintos para expresar la misma cosa.

En general, se requieren varios pasos de descomposición del lenguaje natural para poder llegar a formular con seguridad la proposición en lenguaje simbólico.

Ejemplos:

La temperatura está entre 15°C y 20°C.

La temperatura es al menos de 15°C y la temperatura como máximo vale 20°C.

$(t \geq 15) \wedge (t \leq 20)$

$p: (t \geq 15)$

$p \wedge q$

$q: (t \leq 20)$

El largo supera los 3m **pero** no alcanza los 5m.

El largo es mayor a 3m **y** es menor a 5m.

El largo es mayor a 3m **y** el largo es menor a 5m.

$$(l > 3) \wedge (l < 5)$$

$$p: (l > 3)$$

$$p \wedge q$$

$$q: (l < 5)$$

Nótese que la palabra 'pero' tiene el mismo valor que 'y'.

El largo **o** el ancho es de 3 m.

El largo es de 3m **o** el ancho es de 3m.

$$(l = 3) \vee (a = 3)$$

$$p: (l = 3)$$

$$p \vee q$$

$$q: (a = 3)$$

Aquí tenemos una disjunción incluyente dado que es posible que ambas proposiciones simples sean verdaderas.

La altura es de 3m o 4m.

La altura es de 3m o la altura es de 4m.

$$(h = 3) \underline{\vee} (h = 4)$$

$$p: (h = 3)$$

$$p \underline{\vee} q$$

$$q: (h = 4)$$

En este caso se trata de una disjunción excluyente porque es imposible que ambas proposiciones simples sean verdaderas a la vez.

La capacidad del recipiente **no** es de 6l.

No es verdad que la capacidad del recipiente es de 6l.

$$\sim (c = 6)$$

$$p: (c = 6)$$

$$\sim p$$

La temperatura es mayor a 20°C pero **no** supera los 25°C.

La temperatura es mayor a 20°C y la temperatura **no** supera los 25°C.

La formulación de esta proposición es más complicada pues la segunda proposición simple está negada.

$$p: (t > 20)$$

$$p \wedge \sim q$$

$$q: (t < 25)$$

$$(t > 20) \wedge \sim (t < 25)$$

Tablas de Verdad

Cuando se formula una proposición compuesta resulta necesario comprobar si realmente corresponde a lo expresado en lenguaje natural. Vale decir que se debe verificar si los valores de verdad que ocurren para las distintas combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples son los esperados.

Las **tablas de verdad** permiten realizar esa verificación.

<i>Conjunción</i>		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

<i>Disjunción Incluyente</i>		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

<i>Disjunción Excluyente</i>		
p	q	$p \underline{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

<i>Negación</i>	
p	$\sim p$
T	F
F	T

Una vez formada una proposición, la tabla de verdad se confecciona teniendo en cuenta el orden de prioridad de los operadores lógicos.

Ejemplos:

La temperatura es mayor a 20°C pero **no** supera los 25°C.

$(t > 20) \wedge \sim(t < 25)$

$p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

Comprobamos que la proposición compuesta es verdadera cuando la primera proposición simple es verdadera y la segunda es falsa.

La temperatura está entre 20°C y 25°C, o bien es menor a 15°C

Aquí nos encontramos con tres proposiciones:

p: ($t \geq 20$)

q: ($t \leq 25$)

r: ($t < 15$)

Tenemos dos posibilidades: que la temperatura esté dentro del rango (conjunción de p y q) o que sea menor de un valor (r), pero ambas cosas no pueden suceder a la vez (disyunción excluyente).

$$(p \wedge q) \vee r \quad [(t \geq 20) \wedge (t \leq 25)] \vee (t < 15)$$

Al tratarse de tres proposiciones simples, existen 8 combinaciones posibles de valores de verdad.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
T	T	T	T	F
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

Se han tachado los renglones que corresponden a combinaciones imposibles de valores de verdad de las proposiciones simples (por ejemplo, si r es verdadera, q no puede ser falsa).

Tautología y Contradicción

Si la proposición compuesta es **verdadera** para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones simples, se dice que estamos ante una **tautología**.

Si la proposición compuesta es **falsa** para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones simples, se dice que estamos ante una **contradicción**.

En ambos casos, la proposición compuesta estará mal formulada, y habrá que revisar si corresponde al enunciado en lenguaje natural.